Областная математическая олимпиада на приз Губернатора области

II Областная математическая олимпиада

на приз Губернатора области

2016-2017 учебный год

6 КЛАСС

1. В некоторой компании каждый является либо рыцарем, и всегда говорит правду, либо лжецом, и всегда говорит неправду. Среди трёх участников компании прозвучало три заявления. Один сказал, что рыцарей в компании больше, чем лжецов, второй сказал, что их меньше, а третий заявил, что тех и других поровну. Через некоторое время к компании присоединился четвёртый участник, и его спросили, правда ли то, что в новой компании лжецов больше, чем рыцарей? Что он ответит: "да" или "нет"?

2. Мальчику и девочке дали какое-то количество конфет. После этого они стали играть в следующую игру. Если у мальчика число конфет чётно, то он отдаёт девочке ровно половину. Если нечётно, то игра заканчивается. Далее девочка, получив конфеты, отдаёт треть своих конфет мальчику, если число имеющихся у неё конфет делится ли нацело на три. Если нет, то игра окончилась. Мальчик, получивший конфеты, отдаёт девочке четверть своих конфет, если число его конфет делится нацело на четыре, а в противном случае игра окончилась. Если игра продолжается, то девочка проверяет, делится ли на пять число её конфет, и пятую часть отдаёт мальчику, и так далее.

   Игра продолжалась до тех пор, пока мальчик не обнаружил, что не может отдать девочке ровно шестую часть своих конфет. Какое наименьшее число конфет могло быть в этой игре?

3. Чему равна сумма всех трёхзначных чисел, в записи которых содержится ровно две цифры 6?

4. На плоскости расположено 19 точек, причём для любых трёх из них можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1 см. Доказать, что некоторые 10 точек можно накрыть кругом радиусом 1 см.

5. На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

II Областная математическая олимпиада
на приз Губернатора области
2016-2017 учебный год

7 КЛАСС

1. В некоторой компании каждый является либо рыцарем, и всегда говорит правду, либо лжецом, и всегда говорит неправду. Среди шести участников компании прозвучало два заявления, что рыцарей в компании больше, чем лжецов; два заявления, что рыцарей меньше, чем лжецов; и два заявления, что рыцарей и лжецов в компании поровну. Через некоторое время к компании присоединился седьмой участник, и он сказал то, что в новой компании лжецов больше, чем рыцарей. Кем был этот новый участник: рыцарем или лжецом?

2. Мальчику и девочке дали одинаковое чётное количество конфет. После этого они стали играть в следующую игру. Сначала мальчик отдаёт девочке ровно половину своих конфет. Далее девочка, получив конфеты, проверяет, делится ли нацело на три число имеющихся у неё конфет. Если да, то она отдаёт треть своих конфет мальчику. Если нет, то игра окончилась. Мальчик, получивший конфеты, проверяет, делится ли нацело на четыре число его конфет, и если да, то он четверть своих конфет отдаёт девочке, а в противном случае игра окончилась. Если игра продолжается, то девочка проверяет, делится ли на пять число её конфет, и пятую часть отдаёт мальчику, и так далее. Кто последним отдал часть своих конфет в этой игре?

3. Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

4. На плоскости расположено 199 точек, причём для любых трёх из них можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1 см. Доказать, что некоторые 100 точек можно накрыть кругом радиусом 1 см.

5. Найти количество способов преобразовать число 1 в 20, используя только две операции: $+1$ (плюс один) и $\times 2$ (умножить на два).

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная математическая олимпиада на приз Губернатора области

II Областная математическая олимпиада на приз Губернатора области 2016-2017 учебный год

8 КЛАСС

1. Аккумуляторной зарядки смартфона Васи хватает на 100 часов стационарного режима или на 4 часа интенсивного использования. Однажды мальчик полностью зарядил свой смартфон, после чего какое-то время с увлечением играл на нём в компьютерную игру. Закончив играть, Вася заметил, что на часах было 15:00.

   После этого телефон длительное время бездействовал, и в 16:00 следующего дня стал подавать сигналы о том, что нуждается в подзарядке. Можно ли по этим данным определить, в течение какого времени Вася играл в игру?

2. В два сосуда налили одинаковое количество жидкости, не превышающее половины ёмкости сосуда. Далее воду стали переливать. Сначала из первого сосуда во второй перелили половину имеющейся в нём воды. Далее из второго сосуда в первый перелили треть воды, которая в нём оказалась. Затем из первого сосуда перелили $1/4$ часть воды, потом $1/5$ из второго в первый, и так совершили 2016 переливаний. Требуется сравнить между собой содержимое того и другого сосуда после всех этих процедур.

3. Дано трёхзначное число, все цифры попарно различны. Второе число получено из первого перенесением начальной цифры в конец числа. Два таких числа сложили, и сумму разделили пополам. Получилось трёхзначное число, которое совпадёт с первым, если его начальную цифру снова перенести в конец. Найти все такие трёхзначные числа.

4. На плоскости расположено 28 точек, причём для любых четырёх из них можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1 см. Доказать, что некоторые 10 точек можно накрыть кругом радиусом 1 см.

5. В однокруговом шахматном турнире участвовало 16 игроков. Назовем шахматиста успешно выступившим, если он набрал более 80% от максимально возможного количества очков. Какое наибольшее число успешно выступивших участников могло быть в турнире? (За победу в шахматах дают одно очко, за ничью — половину очка, за поражение — 0 очков).

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

II Областная математическая олимпиада на приз Губернатора области

2016-2017 учебный год

9 КЛАСС

1. На две чаши весов положили 10 гирь массами 1г, 2г, 3г, 4г, 5г, 6г, 7г, 8г, 9г, 10г так, что одна из чаш перевесила. Затем стали убирать по одной гире, причём каждый раз перевешивала другая чаша. Какая гиря могла остаться последней?

2. Через три вершины квадрата проведены параллельные прямые. Расстояния между ними равны 2, 5 и 7. Найти все допустимые значения длины стороны квадрата.

3. Штрих-код состоит из чередующихся белых и чёрных полос, причём первая и последняя полосы —- чёрные. Ширина каждой полосы равна 1 или 2, а суммарная ширина штрих-кода должна равняться 10. Сколько существует различных штрих-кодов (читаемых слева направо) с такими свойствами?

4. Любую вершину треугольника можно сдвигать по проходящей через неё прямой, параллельной противоположной стороне. Доказать, что можно такими операциями превратить равносторонний треугольник со стороной 1 в любой другой треугольник той же площади.

5. Решить уравнение
$$\frac{x(7-x)}{x^2-3} = \sqrt{10-x}.$$

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная математическая олимпиада на приз Губернатора области

II Областная математическая олимпиада

на приз Губернатора области

2016-2017 учебный год

10 КЛАСС

1. Найти множество значений функции: $y = \sqrt{x^2 + 5x + 4} - x$.

2. Камни лежат в трёх кучках: в одной 51 камень, в другой 49 камней, а в третьей 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню?

3. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют условию $a + b + c + d = 1$. Доказать неравенство
$$ab + bc + cd \leq \frac{1}{4}.$$

4. Найти углы треугольника, если центры вписанной и описанной окружности симметричны относительно одной из его сторон.

5. Квадрат натурального числа n — шестизначное число, десятичная запись которого есть палиндром (то есть она одинаково читается слева направо и справа налево). Может ли n также оказаться палиндромом?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35