Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2016 – 2017 учебный год

6 класс (решения)

1. Ответ: он ответит "нет".

   Среди трёх человек не может быть одинаковое число рыцарей и лжецов. Значит, третий заведомо солгал. Поскольку рыцарей либо больше, либо меньше, то среди первых двоих один и только один сказал правду. Следовательно, рыцарь среди троих один, а лжецов два.

   Четвёртый участник мог быть как рыцарем, так и лжецом. Если он рыцарь, то в новой компании лжецов и рыцарей по два, и он должен сказать правду, то есть ответить на вопрос отрицательно. Если четвёртый участник лжец, то на самом деле лжецов три против одного рыцаря, то есть лжецов больше. Но он должен ответить неправду, отрицая этот факт.

2. Ответ: 8 конфет.

   Для начала проверим, что 8 конфет могло быть. Пусть каждый получил по 4 конфеты. Тогда мальчик отдаёт девочке половину, и у них становится 2 и 6 конфет соответственно. Девочка отдаёт треть, и тогда у них снова становится по 4 конфеты. Мальчик отдаёт четверть, то есть 1 конфету, и их становится 3 и 5. Девочка отдаёт пятую часть, и тогда у обоих снова оказывается по 4 конфеты, как в начале. Теперь мальчик уже не может отдать ровно шестую часть; игра окончилась.

   Проверим, что меньше 8 конфет быть не могло. По условию, у мальчика в начале чётное число конфет. Если их 6, то он отдал три, и у девочки число конфет на три не делится. Если их 4, то он отдал 2, и у девочки могло оказаться только 3 конфеты. Одну она отдаёт мальчику, у которого конфет становится 3, и это число не делится нацело на 4.

   Наконец, если у мальчика было бы 2 конфеты, то он одну отдаёт девочке, и у той их становится 3 или 6. Сколько бы она ни отдала в качестве трети, мальчик получит не более 2 штук, и его число конфет не будет делиться на 4.

3. Ответ: 16251.

   Рассмотрим числа вида $66x$, где $x \neq 6$. Их всего 9, и сумма таких чисел равна $660 \cdot 9 + 39$. Последнее слагаемое — это сумма всех цифр кроме 6. Для чисел вида $6x6$, где $x \neq 6$, получается $606 \cdot 9 + 390$. А чисел вида $x66$, где $x \neq 0$, $x \neq 6$, имеется 8, и их сумма составляет $66 \cdot 8 + 3900$. Складывая всё вместе, получаем 16251.

4. Предположим, что найдутся две точки A и B на расстоянии не менее 1 см друг от друга. Построим круги радиусом 1 см с центрами A и B. Любая из оставшихся точек попадёт хотя бы в один из этих кругов, поскольку расстояние от неё до A или B по условию должно быть меньше 1 см. Поскольку точек всего 19, то хотя бы в одном из этих двух кругов окажется как минимум 10 точек, что и требовалось.

   Если двух точек из предыдущего абзаца не найдётся, то расстояние между любыми двумя точками менее 1 см. Тогда берём круг с центром в любой из точек радиусом 1 см, и все 19 точек попадут в него.

5. Ответ: 150.

   Пусть на первом складе было m ящиков, а на втором n. Бракованных деталей при этом имелось в общей сложности $3m$ на первом складе и $6n$ на втором. После того, как ящики перенесли, средние значения стали равны 2 и 5, а ящиков стало $m - 50$ и $n + 50$ соответственно. Общее число бракованных деталей теперь равно $2(m - 50) + 5(n + 50)$, но оно осталось прежним, то есть равным $3m + 6n$. Приравнивая обе величины, получаем $m + n = 150$, и это есть общее число ящиков на двух складах вместе.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2016 – 2017 учебный год

7 класс (решения)

1. Ответ: рыцарем.

   Среди трёх возможных ответов на вопрос о том, кого в компании больше (рыцарей, либо лжецов, либо тех и других поровну), один и только один является правдивым. Его дали двое, поэтому рыцарей среди шести было ровно два, а лжецов, соответственно, четыре. Кем бы ни являлся седьмой участник, после его прихода число лжецов будет превышать число рыцарей. Он сказал правду, следовательно, он является рыцарем.

2. Ответ: девочка.

   Прежде всего заметим, что игра рано или поздно окончится. Число конфет ограничено, и когда-то наступит момент, при котором число конфет отдающего не делится на очередное натуральное число.

   Изначально у каждого было по $2k$ конфет. Мальчик отдаёт k, и у девочки становится $3k$ конфет. Это число делится на 3, она k конфет возвращает мальчику, и у них снова становится поровну конфет. Если k нечётно, то игра окончилась. В противном случае можно положить $k = 2m$, и из $4m$ своих конфет мальчик отдаёт четверть. Тогда у девочки становится $5m$ конфет, она пятую часть отдаёт мальчику, и у них конфет снова поровну.

   Легко заметить, что имеет место общая закономерность. После каждого хода девочки число конфет становится одинаковым. Тогда, если мальчик ей может отдать n-ю часть своих конфет, то у девочки становится $n + 1$ доля конфет, и она возвращает мальчику $\frac{1}{n+1}$ часть, то есть в точности то, что она только что получила. Отсюда следует, что именно она сделает последний из ходов в игре.

3. Ответ: 180.

   Делимость на 4 зависит только от двух последних цифр. Первые две цифры при этом выбираются произвольно, с учётом ограничений. На первом месте может стоять любая из 5 цифр, кроме нуля и четырёх "запрещённых"; на втором месте любая из 6. Итого 30 вариантов.

   На конце находится чётная цифра, и это либо 0, либо 2. Перед нулём также находится чётная цифра, и это даёт два варианта 00 и 20. Перед 2 находится нечётная цифра, любая кроме 5. Это даёт ещё 4 варианта для двух последних цифр: 12, 32, 72, 92. Итого 6 возможностей.

   По правилу произведения, всего чисел будет $30 \cdot 6 = 180$.

4. Предположим, что найдутся две точки A и B на расстоянии не менее 1 см друг от друга. Построим круги радиусом 1 см с центрами A и B. Любая из оставшихся точек попадёт хотя бы в один из этих кругов, поскольку расстояние от неё до A или B по условию должно быть меньше 1 см. Поскольку точек всего 199, то хотя бы в одном из этих двух кругов окажется как минимум 100 точек, что и требовалось.

   Если двух точек из предыдущего абзаца не найдётся, то расстояние между любыми двумя точками менее 1 см. Тогда берём круг с центром в любой из точек радиусом 1 см, и все 199 точек попадут в него.

5. Ответ: 60 способов.

   Пусть $f(n)$ означает количество способов преобразовать описанным способом 1 в n. Тогда $f(1) = 1$, и далее для каждого нечётного числа $f(2k+1) = 2k$ (нечётное число можно получить только прибавлением единицы), и $f(2k) = f(2k-1)+f(k)$ (чётное число можно получить прибавлением 1 из предыдущего, или удвоением числа вдвое меньшего).

   Из этих рекуррентных формул следует правило последовательного заполнения клеток массива. Получается $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = 2$, $f(4) = f(5) = 4$, $f(6) = f(7) = 6$, $f(8) = f(9) = 10$, $f(10) = f(11) = 14$, $f(12) = f(13) = 20$, $f(14) = f(15) = 26$, $f(16) = f(17) = 36$, $f(18) = f(19) = 46$, $f(20) = f(19) + f(10) = 46 + 14 = 60$.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2016 – 2017 учебный год

8 класс (решения)

1. Ответ: да, можно; 3 часа.

   От момента, когда Вася закончил игру, до момента, когда аккумулятор полностью разрядился, прошли сутки и ещё один час, то есть 25 часов. За это время пребывания в стационарном режиме, батарея разрядилась на одну четверть. Это значит, что за время игры она разрядилась на $3/4$. Поскольку за 4 часа игры она разряжается полностью, получается, что Вася играл 3 часа.

2. Ответ: в обоих сосудах будет одинаковое количество воды.

   Пусть в обоих сосудах в какой-то момент имеется равное количество воды, как в начале, и мы переливаем из первого сосуда во второй $1/n$ часть жидкости. Обозначая объём воды в каждом из сосудов через nx, мы видим, что в первом сосуде после переливания остаётся $(n-1)x$, а во втором $(n+1)x$ воды. Далее по условию требуется перелить из второго сосуда в первый $\frac{1}{n+1}$ часть объёма, то есть x. Это значит, что после такого переливания воды в сосудах снова будет поровну.

   Поскольку число 2016 чётно, после серии из 1008 двойных переливаний у нас будет равное количество воды в обоих сосудах.

3. Ответ: 185, 296, 814, 925.

   Обозначим исходное число через $\overline{abc}$. Первую цифру перенесём в конец, получая $\overline{bca}$. По условию, полусумма этих двух чисел должна быть равна $\overline{cab}$. Это приводит к уравнению $(100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) = 2(100c + 10a + b)$. После упрощений получается $81a + 108b = 189c$, то есть $3a + 4b = 7c$.

   Если $a > c$, то $3(a - c) = 4(c - b)$, откуда $c > b$. Можно положить $a - c = 4k$, $c - b = 3k$, где k натуральное. При этом $a - b = 7k$, откуда $k = 1$. Разность цифр равна 7 только в двух случаях: $8 - 1$ и $9 - 2$, для которых c равно 4 и 5 соответственно. Это даёт два последних числа из списка: 814 и 925.

   Аналогично, если $a < c$, то $3(c - a) = 4(b - c)$, и можно положить $c - a = 4k$, $b - c = 3k$ для некоторого натурального k, где $b - a = 7k$. Здесь снова $k = 1$ и два варианта $8 - 1$, $9 - 2$ для чисел b и a, чему соответствуют значения c, равные 5 и 6. Это даёт два первых числа из списка: 185 и 296.

4. Предположим, что найдутся три точки A, B, C, расстоянии между любыми двумя из которых не меньше 1 см. Построим круги радиусом 1 см с центрами A, B, C. Любая из оставшихся точек попадёт хотя бы в один из этих трёх кругов, поскольку расстояние от неё до A, B или C по условию должно быть меньше 1 см. Поскольку точек всего 28, то хотя бы в одном из этих трёх кругов окажется как минимум 10 точек, что и требовалось.

   Теперь допустим, что трёх точек из предыдущего абзаца не найдётся. Тогда среди любых трёх точек найдутся две, расстояние между которыми меньше 1 см. Если расстояние между любыми двумя из имеющихся точек меньше 1 см, то берём круг с центром в любой из них, и все 28 точек попадут в него. В противном случае найдутся две точки A, B, расстояние между которыми не меньше 1 см. Построим круги радиусом 1 см с центрами A, B. Любая из оставшихся точек будет удалена от A или B на расстояние меньше 1 см, то есть она попадёт хотя бы в один из двух кругов. Тогда хотя бы в одном круге окажется не менее 14 точек.

5. Ответ: 6 участников.

   Максимальное число очков равно 15, и 20% от него равно 3. Чтобы выступить успешно, нужно потерять менее 3, то есть не более 2 с половиной очков, что соответствует пяти ничьим. Если шестеро сыграют вничью между собой и выиграют у всех остальных, то будет 6 успешных участников. Больше их быть не может, так как 7 и более участников на встречах между собой в среднем теряют не меньше 3 очков, то есть среди них найдётся тот, кто потеряет как минимум это среднее количество очков.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2016 – 2017 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: только гиря весом 1 г.

   Могла остаться только одниграммовая гиря. Такой пример придумать легко (ставя гири в обратном порядке), а никакая другая гиря остаться в конце не могла, так как снятие гири в 1 г не могло привести к перевешиванию чаш: вес более тяжёлой чаши превосходил вес более лёгкой как минимум на 1 г, и снятие одниграммовой гири или оставляло бы всё по-старому, или давало равновесие.

2. Ответ: $\sqrt{29}$, $\sqrt{53}$ или $\sqrt{74}$.

   Из трёх вершин квадрата одна соединена сторонами с двумя другими. Пусть B соединена таким образом с A и C. Расположим прямые так, чтобы верхняя из них была удалена на расстояние 2 от средней, а средняя на расстояние 5 от нижней. Рассмотрим три случая, в зависимости от того, на какой из трёх прямых лежит точка B.

   Если B лежит на средней прямой, то проекции стороны на две оси, одна из которых параллельна трём прямым, а другая перпендикулярна, равны 2 и 5. Тогда сторона равна $\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.

   Пусть B лежит на верхней прямой. Тогда длины проекций равны 2 и 7, а сторона равна $\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$.

   Наконец, если B лежит на нижней прямой, то проекции равны 5 и 7, а сторона равна $\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$.

3. Ответ: 45.

   Рассмотрим числа, равные ширине полос штрих-кода, принимающие значения 1 или 2. В сумме они дают 10, а число слагаемых нечётно, поскольку цвета чередуются, а крайние две полосы чёрные. Получается задача о количестве представлений числа 10 в виде суммы нечётного числа слагаемых, каждое из которых равно 1 или 2.

   Ясно, что слагаемых при этом может быть равно 5, 7 или 9. Если их 5, то возможен только 1 вариант с суммой пяти двоек. Если слагаемых 9, то среди них ровно одна двойка, а остальные единицы. Таких вариантов 9. Наконец, если слагаемых 7, то вычтем из каждого по единице. Получится представление числа 3 в виде суммы 7 нулей или единиц. Места для трёх единиц выбираются $7\cdot 6\cdot 5/3!=35$ способами. Итого получается $1+9+35=45$ штрих-кодов.

4. Понятно, что площадь треугольника при всех таких преобразованиях остаётся неизменной. Пусть она равна $S = \sqrt{3}/4$, то есть площади равностороннего треугольника со стороной 1.

   Рассмотрим произвольный треугольник ABC площади S. Докажем, что у него имеется сторона длиной не менее 1. Предполагая противное, то есть считая, что каждая из сторон строго меньше 1, рассматриваем наименьший по величине угол. Он не превосходит 60 градусов, и его синус не больше $\sqrt{3}/2$. Тогда площадь, равная половине произведения длин смежных сторон на синус угла, оказывается меньше $\sqrt{3}/4$, что приводит к противоречию.

   Итак, пусть $AB \geq 1$. Тогда, начиная с равностороннего треугольника со стороной 1 и смещая одну из его вершин по описанным правилам, мы можем получить сторону любой заданной длины, большей 1, что очевидно из сравнения длин наклонных. В частности, мы можем сделать одну сторону равной AB по длине. Поскольку площадь задана, высота полученного треугольника, опущенная на основание AB, оказывается такой же, как и у треугольника ABC. Остаётся переместить точку C по прямой, параллельной AB, в нужное место.

5. Ответ: $x \in \{\frac{\sqrt{41}-1}{2}; \frac{9-3\sqrt{13}}{2}\}$.

   Уравнение можно переписать в виде $\frac{x}{x^2-3} = \frac{y}{y^2-3}$, где $y = \sqrt{10-x}$. Таким образом, $x(y^2-3) = y(x^2-3)$, то есть $(x-y)(xy+3) = 0$.

   Получилась совокупность двух условий. Первое имеет вид $x = \sqrt{10-x}$, и здесь отбирается положительный корень квадратного уравнения: $x = \frac{\sqrt{41}-1}{2}$.

   Для второго условия $x\sqrt{10-x} = -3$ возводим в квадрат с дополнительным ограничением $x < 0$. Получается кубическое уравнение $x^3 - 10x^2 + 9 = 0$, у которого один из корней равен $x = 1$, что приводит к разложению на множители $(x-1)(x^2-9x-9) = 0$. Осталось решить квадратное уравнение и найти его отрицательный корень $x = \frac{9-3\sqrt{13}}{2}$.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2016 – 2017 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: $y \in [1; \frac{5}{2}) \cup [4; +\infty)$.

   Пусть функция принимает значение k. Тогда уравнение $\sqrt{x^2+5x+4} = x + k$ имеет решение. Это значит, что выполняется возведённое в квадрат равенство, упрощаемое до $5x + 4 = 2kx + k^2$, а также $x + k \geq 0$.

   Выражаем x через k, обращая внимание на то, что деление здесь возможно: $x = \frac{k^2-4}{5-2k}$. Осталось учесть неравенство $x + k \geq 0$. Это значит, что $\frac{k^2-5k+4}{2k-5} \geq 0$, что даёт ответ $k \in [1; \frac{5}{2}) \cup [4; +\infty)$.

2. Ответ: нельзя.

   Первым ходом какие-то две кучки придётся объединить. Если это первые две, то получатся числа 100 и 5. Оба они делятся на 5, и тогда это свойство будет сохраняться как при объединении кучек, так и при разделении кучки с чётным числом камней на две равные части (если $2n$ кратно 5, то и n кратно 5).

   Это же свойство будет верно для числа 7 вместо 5 при объединении первой кучки с третьей (56 и 49), и для числа 3 при объединении второй и третьей кучек (51 и 54).

3. Выразим d и подставим: $ab + bc + c - ac - bc - c^2 \leq \frac{1}{4}$, то есть надо доказать неравенство $c^2 + ac - c + \frac{1}{4} \geq ab$, где $a + b + c < 1$, и числа a, b, c положительны.

   Домножим обе части неравенства $b < 1 - a - c$ на a. Получится $ab < a - a^2 - ac$. Теперь достаточно показать, что правая часть последнего неравенства не больше $c^2 + ac - c + \frac{1}{4}$. Это верно, поскольку $a^2 + c^2 + 2ac - a - c + \frac{1}{4} = (a+c)^2 - (a+c) + \frac{1}{4} = (a + c - \frac{1}{2})^2 \geq 0$.

   Заметим, что итоговое неравенство является строгим.

4. Ответ: 108, 36 и 36 градусов.

   Ясно, что треугольник равнобедренный. Пусть A — вершина, BC — основание, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной. Каждый из углов ABI, CBI, CBO равен $\alpha/2$, где α — угол при основании. Тогда угол OAB равен $3\alpha/2$ ввиду $OA = OB$. Поэтому $5\alpha/2 = 90°$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника), и $\alpha = 36°$.

5. Ответ: не может.

   Применим признак делимости на 11. Рассмотрим 6-значное число-палиндром; оно имеет вид $\overline{abccba}$. Его знакочередующаяся сумма цифр $a - b + c - c + b - a$ равна нулю, то есть делится на 11. Значит, на 11 делится и само это число. Из этого можно сделать вывод, что n тоже делится на 11. При этом x обязано быть трёхзначным, и если оно является палиндромом, то имеет вид $n = \overline{yzy}$. По признаку делимости, $2y - z$ кратно 11. С учётом того, что y и z цифры, это значит, что $z = 2y$ или $2y = z + 11$, где во втором случае z нечётно.

   Таких чисел немного, и их можно выписать и проверить. Числа первой "серии": 121, 242, 363, 484. Квадраты первых двух не шестизначны. Квадрат шестизначного числа, начинающегося с 3, начинается с 1, поэтому 363 не подходит, так как оканчивается на 9. По той же причине не подходит 484 (начинается с 1 или 2, а оканчивается на 6).

   Вторая "серия"такова: 616, 737, 858, 979. Можно применить прямое возведение в квадрат и убедиться, что палиндромов нет, а можно воспользоваться теми же соображениями, что и выше, проверяя, что первая и последняя цифра квадрата не совпадут.